

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologică : profil tehnic

IX. OSZTÁLY

1.

- a) Adj példát olyan racionális együtthatójú másodfokú egyenletre, melynek gyöke az $x_1 = -1 + \sqrt{3}$ szám!
- b) Egy kereskedő kibérelt felújítás céljára egy olyan négyzet alakú kereskedelmi felületet, amelynek oldalhossza $2x - 3$ méter. Egyik sarokban berendezett egy x méter oldalhosszúságú négyzet alakú raktárt, a fennmaradó 24 négyzetméteren állítja ki az árut. Mekkora területet bérelt ki?

2. Tekintsük az ABC háromszöget és azokat az M, N pontokat a háromszög síkjában, amelyekre $\overrightarrow{AM} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{CN} = q \cdot \overrightarrow{CB}$, ahol $q > 0$.

- a) Igazold, hogy $\overrightarrow{AN} = (1 - q) \cdot \overrightarrow{AC} + q \cdot \overrightarrow{AB}$.
- b) Határozd meg q azon értékét, amelyre az A, M, N pontok kollineárisak!

3. Adottak a következő sorozatok: $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$, ahol $a_1 = 2, a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$, bármely $n \geq 1$ esetén

és $b_n = \frac{3 - a_n}{a_n - 1}$, bármely $n \geq 1$ esetén.

- a) Határozd meg az a_2, a_3, a_4 tagokat!
- b) A matematikai indukció módszerével igazold, hogy $a_n = \frac{n+1}{n}$, bármely $n \geq 1$ esetén!
- c) Igazold, hogy a b_n sorozat számtani haladvány!

4. Matei és Irina IX. osztályos tanulók, akik az iskolában 15 tantárgyat tanulnak, és akiknek az I. félév végén ugyanannyi volt az általánosuk. Tudva, hogy csak nyolcas, kilences és tízes lezárásaik voltak, és a Matei tízes, kilences és nyolcas lezárásainak száma rendre egyenlő az Irina kilences, nyolcas és tízes általánosainak számával, számítsd ki, hogy hány darab tízes általánosa volt Irinának!

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologică : profil tehnic

X. OSZTÁLY

1.

a) Ha $a = \sqrt{2x+3}, b = \sqrt[3]{4x-4}, x \in [-\frac{3}{2}, \infty)$, igazold, hogy $2a^2 - b^3 = 10$.

b) Oldd meg az \mathbb{R} -ben a következő egyenletrendszert:
$$\begin{cases} 2a^2 - b^3 = 10 \\ a + b = 5 \end{cases}.$$

2. Adott az $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 1 - \varepsilon z$ függvény, ahol $\varepsilon = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Ellenőrizd, hogy $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0$, $\varepsilon^3 = -1$

b) Igazold, hogy $f(f(z)) = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 z, \forall z \in \mathbb{C}$.

c) Igazold, hogy $f(f(f(z))) = z, \forall z \in \mathbb{C}$.

3. Tekintsük a $G = \left\{ w \in \mathbb{C} \mid w = \frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z}, \forall z \in \mathbb{C}^* \right\}$ halmazt.

a) Igazold, hogy: $\forall w \in G \Rightarrow w \in \mathbb{R}$.

b) Igazold, hogy $-2 \leq \frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z} \leq 2, (\forall) z \in \mathbb{C}^*$.

4. Tekintsük az $f : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\log_2(1-x^2)}{x^2}$ függvényt, és legyen

$$S_n = \frac{1}{2^2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^2} f\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + \frac{1}{n^2} f\left(\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Igazold, hogy $\frac{1}{k^2} f\left(\frac{1}{k}\right) = \log_2(k+1) - 2\log_2 k + \log_2(k-1), \quad \forall k \geq 2$.

b) Igazold, hogy $S_n = \log_2 \frac{n+1}{2n}, (\forall) n \geq 2$.

c) Igazold, hogy $S_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, (\forall) n \geq 2$.

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

XI. OSZTÁLY

1. Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ és $M_t = \frac{t}{2} \cdot A + \frac{1}{2t} \cdot B, t > 0$ mátrixokat.

a) Számítsd ki: $A^2, B^2, A \cdot B, B \cdot A$.

b) Ellenőrizd az $M_t \cdot M_v = M_{t \cdot v}, (\forall) t, v > 0$ azonosságot!

c) Igazold, hogy az M_t mátrix invertálható bármely $t > 0$ esetén!

2. Tekintsük az $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ függvényt.

a) Határozd meg az f függvény grafikus képének aszimptotáját $-\infty$ -ben!

b) Számítsd ki: $\left(f(-1) + 2 \cdot f\left(\frac{-1}{2}\right) + \dots + n \cdot f\left(\frac{-1}{n}\right) \right)$

3. Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \cos x$.

a) Számítsd ki $f(0)$ -t és $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ -t!

b) Igazold, hogy $f(x) \geq x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Találj egy olyan $a \in \mathbb{R}$ számot, amelyre $f(a) = a - 1$, és számítsd ki az f függvény határértékét $+\infty$ -ben!

4. Legyen M azon 3×3 típusú mátrixok halmaza, amelyeknek minden elemük a $\{0,1\}$ halmazhoz tartozik (ezeket a mátrixokat 9 hosszúságú kódoknak nevezzük).

a) Adj példát egy olyan A kódra az M halmazból, amelynek determinánsa egyenlő -1 -gyel!

b) Számítsd ki az M halmaz összes kódjainak számát!

c) Adj meg két különböző A és B mátrixot az M -ből, amelyek rendelkeznek az $A^2 = B^2 = I_3$ tulajdonsággal!

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

XII. OSZTÁLY

1. Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_t = \frac{t}{2} \cdot A + \frac{1}{2t^2} \cdot B$ mátrixokat, és $G = \{M_t \mid t > 0\}$

a) Számítsd ki: $A^2, B^2, A \cdot B, B \cdot A$.

b) Igazold, hogy G zárt részhalmaza az $M_2(\mathbb{R})$ halmaznak a mátrixok szorzására vonatkozóan!

c) Igazold, hogy (G, \cdot) Abel-féle csoport!

2. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{2010}$ függvényt, és $F(x) = \int_0^x f(t) dt$,

$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Ellenőrizd, hogy $(1-x) \cdot f(x) = 1 - x^{2011}, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Igazold, hogy az F függvény szigorúan növekvő!

c) Igazold, hogy $F(1) > 3$.

3. Legyen $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx, n \geq 1$.

a) Számítsd ki I_1 -et!

b) Igazold, hogy $I_{2011} \leq I_{2010}$.

4. Legyen $G \subset \mathbb{Z}$ egy véges és nem üres halmaz. Tudjuk, hogy $\forall x, y \in G \Rightarrow x \cdot y \in G$

a) Adj példát egy olyan G halmazra, amely rendelkezik a fenti tulajdonságokkal!

b) Igazold, hogy $2 \notin G$ és G -nek legkebbe 3 eleme van!

c) Ha ráadásul G nem tartalmazza 0-t, akkor (G, \cdot) csoport.

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.